PART4 同じものを含む順列

要点 ① 同じものを含む順列

a，a，b の 3 個の文字の順列を考える。
2 つの a を区別するために，a_1，a_2 とすると，
a_1，a_2，b の 3 個の文字の順列は 3! 通りある。
このうち，a_1，a_2 の区別をなくすと同じ順列
になるものが　　通りずつある。
よって，順列の総数は

$$\frac{3!}{} = \frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1} = 3 \text{（通り）}$$

である。

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_2b \\ a_2a_1b \end{array}\right\} aab \qquad \left.\begin{array}{l} a_1ba_2 \\ a_2ba_1 \end{array}\right\} aba \qquad \left.\begin{array}{l} ba_1a_2 \\ ba_2a_1 \end{array}\right\} baa$$

同様に，a，a，a，b，b，c の 6 個の順列において，
a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c として同じ文字をすべて
区別すると，この 6 文字の順列は 6! 通りある。
このうち，3 つの a の区別をなくすと同じ順列に
なるものが　　通り，そのおのおのに対して，2 つ
の b の区別をなくすと同じ順列になるものが　　通
りある。
よって，順列の総数は

$$\frac{6!}{} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1} = 60 \text{（通り）}$$

である。

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a_1a_2a_3b_1b_2c \\ a_1a_3a_2b_1b_2c \\ a_2a_1a_3b_1b_2c \\ a_2a_3a_1b_1b_2c \\ a_3a_1a_2b_1b_2c \\ a_3a_2a_1b_1b_2c \end{array}\right\} aaab_1b_2c \\ \left.\begin{array}{l} a_1a_2a_3b_2b_1c \\ \vdots \\ a_3a_2a_1b_2b_1c \end{array}\right\} aaab_2b_1c \end{array}\right\} aaabbc$$

一般に，次のことがいえる。

同じものを含む順列の総数

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，
これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は

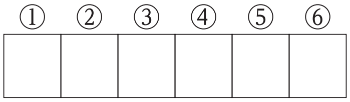
$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \qquad \text{ただし } p+q+r+\cdots\cdots=n$$

例　HOKKAIDO の 8 文字を 1 列に並べるとき，並べ方の総数を求める。

O が 2 個，K が 2 個，H，A，I，D が 1 個の合計 8 個の文字の順列であるから

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1} = 10080 \text{（通り）}$$

a，a，a，b，b，c の 6 個の順列は，次のように組合せの考え方を用いて求めることができる。



・右のように，①～⑥の 6 個の場所を用意する。

・3 つの a を入れる場所を選ぶ方法は　　　通り

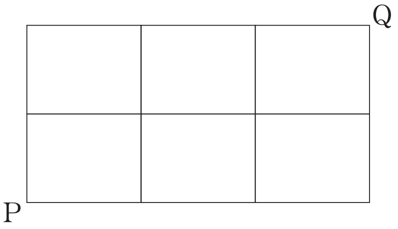
・残りの 3 個の場所から，2 つの b を入れる場所を選ぶ方法は　　　通り

・c は残りの 1 個の場所に入る

よって，順列の総数は

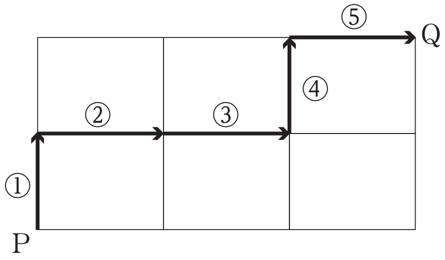
$$_6C_3 \times {}_3C_2 = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{3\cdot2}{2\cdot1} = 60 \text{（通り）}$$

要点② 最短経路の総数

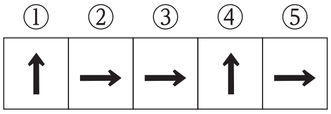


右の図のような道がある。P から Q まで行く最短経路は何通りあるか求める。

右に 1 区画行くことを→，上に 1 区画行くことを↑で表すとすると，P から Q まで行く最短経路の道順の総数は，→ 3 個，↑ 2 個の順列の総数に等しい。



⇔

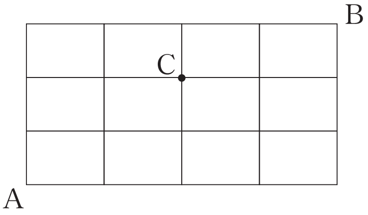


よって，求める最短経路の総数は

$$\underline{\qquad} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1} = 10 \text{（通り）}$$

4 (1) 1, 1, 1, 2, 2, 3 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は何個あるか。

(2) 右の図は，ある町の道を直線で表したものである。次の場合，遠回りをしないで行く道順は何通りあるか。



(i) A から B まで行く。

(ii) A から C を通って B まで行く。

Point Pickup

同じものを含む順列

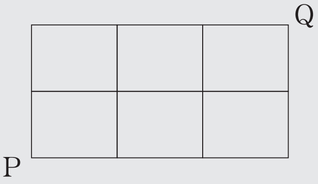
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，
これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \quad \text{ただし } p+q+r+\cdots\cdots=n$$

組合せの考えを用いて ${}_{n}C_{p}\times{}_{n-p}C_{q}\times{}_{n-p-q}C_{r}\times\cdots\cdots$ として求めることもできる。

最短経路の総数

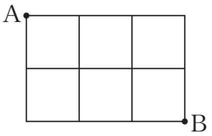
右に進むことを→，上に進むことを↑のように表すと最短経路の道順を，→と↑の「同じものを含む順列」として扱い，その総数を求めることができる。
右図において，P から Q までの最短経路の総数は，→ 3 個，↑ 2 個を 1 列に並べる順列の総数として求めればよい。



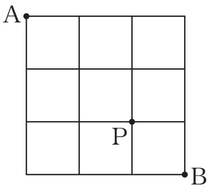
第 3 講　PART4 確認問題

1　1, 1, 2, 2, 2, 2 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は，全部で [アイ] 個ある。

2　右の図のような道がある。A から B まで遠回りをしないで行く道順は全部で [ウエ] 通りある。



3　右の図のような道がある。A から途中 P を通って B まで，遠回りをしないで行く道順は全部で [オカ] 通りある。

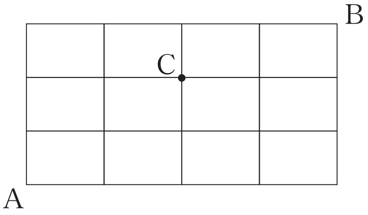


PART4 同じものを含む順列

4

(1) 1，1，1，2，2，3 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は何個あるか。

(2) 右の図は，ある町の道を直線で表したものである。次の場合，遠回りをしないで行く道順は何通りあるか。



(i) A から B まで行く。

(ii) A から C を通って B まで行く。

[解答]

(1) $\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot1}=60$（通り）

（別解）

3 個の 1 が入る位の選び方は ${}_6C_3$ 通り。

残りの位において，2 個の 2 が入る位の選び方は ${}_3C_2$ 通り。

3 は残った位に入る。

よって，求める順列の総数は ${}_6C_3\times{}_3C_2=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{3\cdot2}{2\cdot1}=60$（通り）

(2) 右に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑で表す。

(i) A から B に行くときの道順は，→4 個と↑3 個，合計 7 個の順列で表される。

よって，求める道順の総数は $\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$（通り）

(ii) A から C まで行く道順は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，C から B まで行く道順は $\dfrac{3!}{2!}$ 通り。

よって，求める道順の総数は，積の法則より $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}=6\times3=18$（通り）

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：15

[解説]

6 桁の整数の個数は，1，1，2，2，2，2 を 1 列並べてできる順列の総数に等しい。つまり，

$$\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1}$$ [A]

$$=\mathbf{15}\text{(個)}$$

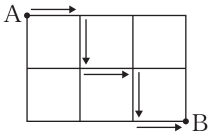
[A]　同じものを含む順列の総数
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は，
$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

2

[正解] ウエ：10

[解説]

右に 1 区画進むことを→，
下に 1 区画進むことを↓
で表す。



A から B に行くときの道順は，
→ 3 個と↓ 2 個の合計 5 個の順列で表される。[B]
よって，求める道順の総数は，

$$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}$$

$$=\mathbf{10}\text{(通り)}$$

[B]　最短経路の総数
→と↓の「同じものを含む順列」として扱う。例えば図の道順では，
→↓→↓→
と並べたと考える。

3

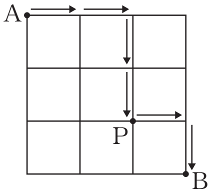
[正解] オカ：12

[解説]

A から P まで行く道順の総数は，

$$\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1}$$

$$=6\text{(通り)}$$ [C]



P から B まで行く道順の総数は，
2 通り
よって，求める道順の総数は，[D]
$$6\times2=\mathbf{12}\text{(通り)}$$

[C]　→を 2 個，↓を 2 個合計 4 個の，「同じものを含む順列」の総数である。

[D]　積の法則により求める。